АНАЛИЗ БАНКОВСКИХ ДЕПОЗИТОВ С ПЛАВАЮЩЕЙ СТАВКОЙ ПРОЦЕНТОВ

Д.М. Воробьев,
соискатель кафедры ЭИ и МЭ

Методы финансово–экономических расчетов для детерминированной ставки процентов хорошо разработаны, изучены и широко используются на практике. Однако использование детерминированных ставок при вычислении наращенных сумм платежей не всегда оправдано, поскольку на поведение процентных ставок влияют многие факторы и, как отмечается в финансовой литературе, выбор ставки процентов "это дело экономического суждения и прогноза".

Например, для ссуды с простой ставкой процентов величина наращенной суммы платежа является функцией трех параметров: первоначальной суммы вклада P, ставки процентов i и продолжительности ссуды n, так как $S = P(1+ni)$. Если речь идет о ссудной финансовой операции, которую планируется осуществить в будущем по отношению к данному моменту времени, то значение параметров, либо части из них, бывает точно не известно. В этом случае можно поступить следующим образом: будем считать, что эти точно не определенные параметры являются случайными величинами с заданным, либо спрогнозированным законом распределения вероятностей. Однако, если предположить, что параметры P, n, i, либо их часть, являются случайными величинами, то в этом случае и наращенная сумма S будет случайной величиной. Естественно, что в этом случае финансиста, экономиста будет прежде всего интересовать ожидаемое среднее значение величины S, то есть ее математическое ожидание $E\{S\}$. Значения случайной величины S будут концентрироваться, группироваться около $E\{S\}$. Мерой близости значений S к математическому ожиданию $E\{S\}$ является дисперсия $D\{S\}$ величины S или среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$, чем меньше дисперсия $D\{S\}$, тем "плотнее" значения S к среднему значению $E\{S\}$. Финансовая операция с меньшей дисперсией наращенной суммы будет более предсказуемой, менее рискованной, чем аналогичная финансовая операция с большим значением $D\{S\}$. В связи с этим среднее квадратическое отклонение σ в коммерческих расчетах берут за меру риска финансовой операции.

Важной числовой характеристикой наращенной суммы S является вероятность попадания S в заданный интервал $[S_1, S_2]$, то есть $P\{S_1 \le S \le S_2\}$.

Рассмотрим теперь задачу, часто возникающую на практике. Некоторое лицо располагает денежной суммой в размере P и собирается положить ее на банковский депозит с плавающей процентной ставкой. Но, т. к. ставка процентов может изменяться банком в одностороннем порядке, то величина наращенной суммы лицу заранее не известна и, поэтому, возникает необходимость в оценке ее будущего значения. В качестве такой оценки можно использовать ее математическое ожидание и вероятность попадания в некоторый наперед заданный интервал.

Построим математическую модель, которая описывает поведение наращенной суммы. Пусть $[t_0, t_M]$ – интервал наращения и будем считать, что моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_{M-1}$ соответствующие изменению ставки процентов известны. Тогда наращенная сумма $S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_M i_M)$, где $n_j = t_j - t_{j-1}; j = \overline{1, M}$, а относительно ставки процентов предполагаем, что она описывается следующей зависимостью: $i_t = f(t) + \varepsilon_t$,

где $f(t)$– некоторый долгосрочный прогноз (тренд) определяющий банковскую политику (например, размер ставки процентов определяемой центральным банком и т. п.)

ε_t– возможные отклонения ставки процентов коммерческого банка от ставки процентов национального банка (надбавки для привлечения клиентов). Математически ε_t представляет собой однородную цепь Маркова с дискретным временем (ОЦМДВ) и конечным пространством состояний $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m\}$.

Заданы характеристики ОЦМДВ:

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \dots \\ \pi_m \end{pmatrix} \text{ – вектор начальных вероятностей, } \quad \sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1,$$

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2m} \\ & \dots & \dots & \\ P_{m1} & P_{m2} & \dots & P_{mm} \end{pmatrix} \text{ – матрица одношаговых переходов, } \quad \sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1.$$

Таким образом, получаем, что наращенная сумма S представляет собой линейную комбинацию M отсчетов случайного процесса i_t и, следовательно, является случайной величиной. Вычислим основные вероятностные характеристики наращенной суммы S:

I. Математическое ожидание

Пусть $S = P(1 + n_1 i_1)$. Тогда

$$E\{S\} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \pi_j P_{jk} P\left(1 + n_1 i_{1j}\right) = P\sum_{j=1}^{m} \pi_j \left(1 + n_1 i_{1j}\right),$$

где $i_{1j} = f(t_0) + \varepsilon_j$,

т. е. проводится усреднение только по вектору начальных вероятностей.

Пусть $S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2)$. Тогда

$$E\{S\} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} \pi_j P_{jk} P_{kr} P\left(1 + n_1 i_{1j} + n_2 i_{2k}\right) = P\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \pi_j P_{jk} \left(1 + n_1 i_{1j} + n_2 i_{2k}\right),$$

где $i_{1j} = f(t_0) + \varepsilon_j$; $i_{2л} = f(t_1) + \varepsilon_л$,

т. е. проводится усреднение по вектору начальных вероятностей и первому переходу.

Обобщая вышеизложенные пункты, имеем:

$$E\{S\} = P\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2=1}^{m}\dots\sum_{j_M=1}^{m} \pi_{j_1} P_{j_1 j_2} P_{j_2 j_3} \times \dots \times P_{j_{M-1} j_M} \left(1 + n_1 i_{1 j_1} + \dots + n_M i_{M j_M}\right), \tag{1}$$

$$i_{rs} = f(t_{r-1}) + \varepsilon_s$$

Преобразуем формулу (1) следующим образом:

$$E\{S\} = P\left(1 + n_1 \sum_{j_1=1}^{m} \pi_{j_1} i_{1 j_1} + \ldots + n_M \sum_{j_1=1}^{m} \ldots \sum_{j_M=1}^{m} \pi_{j_1} P_{j_1 j_2} \times \ldots \times P_{j_{M-1} j_M} i_{M j_M}\right) =$$

$$= P\left(1 + \sum_{k=1}^{M} n_k E\{i_k\}\right), \qquad (2)$$

получим, что математическое ожидание линейной комбинации случайных величин есть линейная комбинация математических ожиданий, что хорошо известно из теории вероятностей.

II. Дисперсия

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$$D\{S\} = E\{S^2\} - E^2\{S\}, \qquad (3)$$

где $E\{S^2\} \overset{(2)}{=} P^2 \cdot \sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{m} \ldots \sum_{j_M=1}^{m} \pi_{j_1} P_{j_1 j_2} \times \ldots \times P_{j_{M-1} j_M} \left(1 + n_1 i_{1 j_1} + \ldots + n_M i_{M j_M}\right)^2$,

$i_{rs} = f(t_{r-1}) + \varepsilon_s$

III. Вероятность попадания в заданный интервал

$$P\{S \in [S_1, S_2]\} = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_M) \in J} \pi_{j_1} P_{j_1 j_2} P_{j_2 j_3} \times \ldots \times P_{j_{M-1} j_M}, \qquad (4)$$

где $J = \left\{(j_1, j_2, \ldots, j_M) : j_k = \overline{1, m};\ k = \overline{1, M};\ P\left(1 + \sum_{k=1}^{M} n_k i_{k j_k}\right) \in [S_1, S_2]\right\}$

$i_{rs} = f(t_{r-1}) + \varepsilon_s$

Итак, получены формулы для нахождения математического ожидания $E\{S\}$, дисперсии $D\{S\}$ и вероятности попадания в заданный интервал $P\{S \in [S_1, S_2]\}$, что дает полную информацию о распределении вероятности наращенной суммы S. Заметим, что данный подход можно использовать и при наращении по ставке сложных и непрерывных процентов. Формулы (1)-(4) в этом случае имеют тот же вид, только используется другой способ вычисления конкретного значения наращенной суммы S.

Полученные математические результаты реализованы программно и вошли в пакет прикладных программ ФЭР ("Финансово – Экономические Расчеты").

В настоящий момент времени в финансовом анализе существует много различных методов для оценки и проведения расчетов по финансовым операциям. Эти методы хорошо изучены и широко используются во всех видах финансовой деятельности. Как правило, они не очень сложны с математической точки зрения, но требуют больших вычислительных затрат из–за необходимости обработки больших объемов информации. Например, даже при определении величины консолидированного платежа финансисту приходиться приводить на некоторый момент времени целую последовательность выплат, что практически невозможно сделать вручную или с помощью калькулятора. А чтобы оценить эффективность инвестиционного проекта, требуется решение сложного уравнения с заданной точностью? Поэтому, возникает необходимость в создании надежного инструментария, позволяющего автоматически проводить трудоемкие вычисления для всего многообразия методов финансового анализа. Именно для этих целей был создан пакет прикладных программ ФЭР.

Пакет ФЭР включает в себя модули для проведения расчетов по следующим типам финансовых операций:

1. Операции, предполагающие разовые выплаты. К ним относятся:
1.1. Определение наращенной суммы, современной величины, продолжительности ссуды и ставки процентов для разных способов начисления процентов.
1.2. Определение эквивалентных ставок процентов данной.
1.3. Консолидирование задолженностей. Сведение потока платежей к разовой выплате.
1.4. Анализ наращенной суммы для случая случайной ставки процентов.
2. Потоки платежей.
2.1. Постоянные потоки платежей. Включены все известные виды финансовых рент.
2.2. Переменные потоки платежей. Изменение параметров по некоторой зависимости.
2.3. Конверсия аннуитетов. Объединение нескольких рент в одну.
3. Погашение задолженностей.
3.1. Погасительным фондом. Создается план погашения задолженности путем создания фонда.
3.2. Равными суммами.
3.3. Равными срочными уплатами. Взнос рассматривается как равная сумма плюс некоторый процент.
3.4. Переменными срочными уплатами. Формирование абсолютно произвольного плана погашения.
4. Эффективность ссуд. Нахождение эффективной ставки процентов для разных видов ссуд.
5. Показатели эффективности инвестиционных проектов.
5.1. Чистая приведенная величина.
5.2. Упрощенный срок окупаемости.
5.3. Дисконтированный срок окупаемости.
5.4. Рентабельность.
5.5. Полная доходность проекта.

Как видно из списка, пакет ФЭР позволяет проводить расчеты по всем наиболее распространенным видам финансовых операций. Существуют версии пакета написанные под операционные системы MS DOS и MS Windows95. Версия под MS DOS написана на языке программирования Borland Pascal 7.0, версия под Windows95 – на Borland Delphi 3.0. Пакет прост в обращении и не критичен к ресурсам ЭВМ. Версия под Windows 95 обладает гибким и удобным пользовательским интерфейсом. В настоящий момент обе версии активно используются в учебном процессе Белорусского государственного университета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Четыркин Е. М. "Методы финансовых и коммерческих расчетов", 1995.

2. Качович Е. "Финансовая математика. Теория и практика финансово – банковских расчетов", 1994.

3. Черкасов Е. В. "Практическое руководство по финансово – экономическим расчетам", 1995.